Algèbres de fonctions stables par intégration
GDR EFI - Anglet

Georges COMTE

Université Savoie Mont Blanc - UMR CNRS 5127

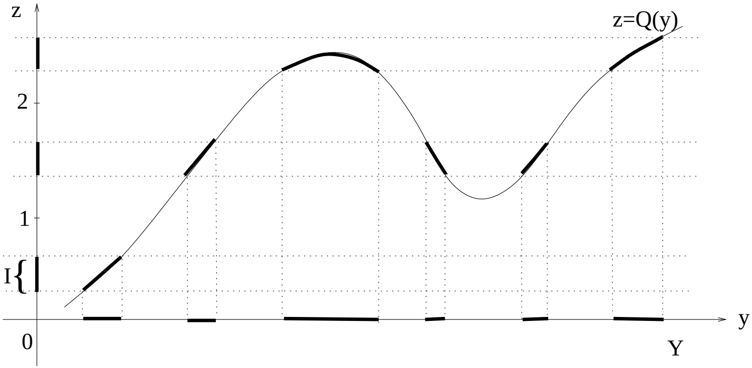
avec R. CLUCKERS, D. MILLER, J.-P. ROLIN & T. SERVI

1er juillet 2019

Applications u.d. mod 1

Définition (H. Weyl, 1916 - Kuipers & Niederreiter, 1974).
$Q := (q_j)_{j \leq J} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^J$ est **uniformément distribuée mod** 1 si

$$\forall I \subset [0,1[^J, \quad \lim_{Y \to +\infty} \frac{\mathrm{Vol}\{y \in [0,Y];\ \{Q(y)\} \in I\}}{Y} = \mathrm{Vol}(I).$$



Propositions.

- $p_j \in \mathbb{R}[y]$, $p_j(0) = 0$, $\mathbb{Z}$-lin. indépendants $\Longrightarrow$

  $$Q = (p_j(y^{1/d}))_{j \leq J} \text{ est u.d. mod. 1.}$$

- Conséquence : $S(y)$ comb. lin. de $e^{ip_j(y^{1/d})}$, p_j pol. distincts nuls en 0,

  $$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0, \quad \int_{|S| \geq \varepsilon} \frac{\mathrm{d}y}{y} = +\infty.$$

- **Conséquence faible** : $p_j \in \mathbb{R}[y]$ distincts, $p_j(0) = 0$,

  $S(y) = \sum_{j \leq J} c_j e^{ip_j(y^{1/d})}$ ne tend pas vers 0 quand $y \to +\infty$.

Motivation générale : logique & géometrie vs intégration

Étude de
$$\boxed{\mathbb{R}^m \supset X \ni x \mapsto \mathscr{I}(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(x, y)\, \mathrm{d}y,}$$

lorsque f appartient à une certaine classe de fonctions, pour comprendre comment intégrer détruit ou préserve les propriétés géométriques de f.

Stratégie. Préparer la fonction f sur des cellules et en comprendre la forme et l'asymptotique.

Cadre possible : Une classe de fonctions construites à partir des fonctions sous-analytiques pour lesquelles on dispose du théorème de préparation de Parusiński/Lion-Rolin.

Motivation spécifique : intégrales oscillantes

$$\boxed{\mathbb{R}^m \ni x \mapsto \mathscr{I}(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}\varphi(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.}$$

Exemple 1. $m = 1$ et $\mathscr{I}(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^n} e^{\mathrm{i}x\phi(y)} f(y)\,\mathrm{d}y$.

- *Phase* ϕ : analytique, $\phi(0) = 0$, $0 \in \mathbb{R}^n$ singularité isolée ϕ,
- *Amplitude* f : $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

En théorie des singularités. (Arnol'd-Gusein-Zade-Varchenko, Malgrange, E. M. Stein...) Asymptotique de $\mathscr{I}(x)$ quand $x \to +\infty$ vs les singularités de ϕ. Après résolution des singularités de ϕ :

$$\exists r \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathscr{I}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{p\in\mathbb{N}^*} x^{-p/r} \sum_{k=0}^{n-1} a_{p,k} \log^k x.$$

$a_{p,k} \neq 0 \Longleftrightarrow e^{2i\pi(\frac{p}{r}-1)}$ v.p. de la monodromie de ϕ de mult. $\geq k+1$.

Exemple 2. Transformée de Fourier à paramètres

$$\widehat{f}(x) = \int_{y\in\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\mathrm{i}(x\cdot y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Ensembles et fonctions sous-analytiques

Ensembles sous-analytiques. $\mathscr{S} = (\mathscr{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minimal tel que

- $\mathbb{R}^n \in \mathscr{S}_n \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$,
- $\mathscr{S}_n$ contient tous les ensembles algébriques et est stable par union finie et complémentaire,
- $\mathscr{S}$ stable par projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et produit,
- $\mathscr{S}_{n+1}$ contient les graphes des fonctions analytiques restreintes $f : [-1,1]^n \to \mathbb{R}$.

Exemples. $[1,+\infty[\ni x \mapsto y = \log(1+\frac{1}{x}) \in \mathscr{S}_2,\ \ y = \sin x,\ y = \log x \notin \mathscr{S}_2.$

Fonctions sous-analytiques. Fonctions ayant un graphe s.a.

$$X \text{ s.a.} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathscr{S}(X) := \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ s.a.}\}.$$

Remarque. f s.a. $\Longrightarrow \exists p \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{R},\ f(x) \sim_\infty ax^p$.

Théorème (Parusiński, Lion-Rolin).

- *Les ensembles s.a. se décomposent en un nombre fini de cellules analytiques,*
- *Les fonctions s.a. se préparent sur des cellules :*

$$f(x,y) = (y-\theta(x))^q h(x) u(x,y).$$

Ce qui est connu

Question de départ ($\varphi = 0$) : Quelle est la classe de $\mathscr{I}$ quand $f \in \mathscr{S}(X \times \mathbb{R}^n)$?

Notation.

- Pour $X \subseteq \mathbb{R}^m$ et $f : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ notons

$$\mathrm{Int}(f) := \{x \in X \; ; y \mapsto f(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

- Pour $X \subseteq \mathbb{R}^m$ s.a., l'algèbre des fonctions « log-s.a. » :

  $\mathscr{C}(X) := \mathbb{R}$-algèbre engendrée par $\{g, \log h : \; g, h \in \mathscr{S}(X), \; h > 0\}$

$$\sum_{j \leq J} g_j \prod_{k \leq K} \log h_{j,k}.$$

Théorème (Lion-Rolin, 1998 + C-Lion-Rolin, 2000).

$f \in \mathscr{S}(X \times \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathrm{Int}(f)$ est s.a. et $\mathscr{I} \in \mathscr{C}(X)$.

Question suivante. Quelle est la stabilité du processus d'intégration à partir de l'intégration des fonctions sous-analytiques ?

Théorème (Cluckers-D. Miller, 2011).

$f \in \mathscr{C}(X \times \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathrm{Int}(f) = v^{-1}(0)$ où $v \in \mathscr{C}(X)$ and $\mathscr{I} \in \mathscr{C}(X)$.

Fonctions s.a. et fonctions oscillantes

On introduit les fonctions oscillantes dans le jeu (ie $\varphi \neq 0$).

Notation. Pour $X \subseteq \mathbb{R}^m$ s.a.

- $\mathscr{D}(X) :=$ $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $\mathscr{C}(X)$ et $\left\{e^{\mathrm{i}\varphi(x)} : \varphi \in \mathscr{S}(X)\right\}$.

Question. $f \in \mathscr{D}(X \times \mathbb{R}^n) \overset{?}{\Rightarrow} \mathscr{I} \in \mathscr{D}(X)$.

NON : $\mathscr{D}$ n'est pas stable par intégration.

Exemple. Si $\mathscr{D}$ était stable par $\mathscr{I}$ alors $e^{-|y|} = \widehat{f}(y) \in \mathscr{D}$, $f(x) = \frac{2}{1+4\pi^2x^2}$.
Mais les fonctions de $\mathscr{D}$ ont des développements asymptotiques convergents de la forme (par préparation s.a.)

$$e^{-|y|} = \sum_{n \geq m} S_n(y) y^{r_n} \log^{s_n} y, \quad r_n, s_n \in \mathbb{Q}, \quad r_n, s_n \searrow$$

où S_n est une combinaison linéaire de J termes $e^{ip_j(y^{1/d})}$, p_j polynôme.
Ceci implique $S_m(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Contradiction, car :

Fait. $S_m \not\equiv 0$ alors $S_m(y)$ ne tend pas vers 0 quand $y \to +\infty$ mais oscille.

Éléments transcendants

Trouver des fonctions à adjoindre à $\mathscr{D}$ pour décrire la plus petite algèbre stable par intégration et contenant $\mathscr{D}$.

$$\boxed{\gamma_{h,\ell}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t) \log^{\ell} |t| e^{\mathrm{i}t} dt,}$$

$\ell \in \mathbb{N},\ h \in \mathscr{S}(X \times \mathbb{R}),\ h(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$.

Notation. Pour X s.-a.

- $\mathscr{E}(X) := \mathscr{D}(X)$-*module* engendré par $\{\gamma_{h,\ell}\}_{h,\ell}$.

Théorème de stabilité. $f \in \mathscr{E}(X \times \mathbb{R}^n) \Longrightarrow$ il existe $h, F \in \mathscr{E}(X)$ tels que

1. $\mathrm{Int}(f) = h^{-1}(0)$,
2. $\forall x \in \mathrm{Int}(f), \quad F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Corollaire. *$\mathscr{E}(X)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.*

Preuve du corollaire. Fubini :
$\gamma_{h,\ell}(x) \cdot \gamma_{h',\ell'}(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,t) \cdot h'(x,t') \cdot \log^{\ell} |t| \cdot \log^{\ell'} |t'|\, e^{\mathrm{i}(t+t')}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}t'$
$\in \mathscr{I}(\mathscr{D}) = \mathscr{E}(X)$ par le théorème de stabilité. $\square$

Corollaire.

1. *$\mathscr{E}$ est la plus petite collection de $\mathbb{C}$-algèbres contenant $\mathscr{S} \cup \left\{ e^{i\varphi} :\ \varphi \in \mathscr{S} \right\}$ et stable par intégration.* $\square$
2. *En particulier $\mathscr{E}$ est stable par transformée de Fourier.* $\square$

Générateurs de $\mathscr{E}$

Remarque. Un éléments de $\mathscr{E}(X \times \mathbb{R}^n)$ est une somme finie de ***générateurs*** du type

$$\boxed{T(x,y) = f(x,y) \cdot e^{\mathrm{i}\varphi(x,y)} \cdot \gamma(x,y)} \text{ où}$$

$$f \in \mathscr{C}(X \times \mathbb{R}^n), \; \varphi \in \mathscr{S}(X \times \mathbb{R}^n) \text{ et } \gamma(x,y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y,t) \log^{\ell} |t| e^{\mathrm{i}t} \, \mathrm{d}t.$$

Déf. Un générateur $T(x,y) \in \mathscr{E}(X \times \mathbb{R}^n)$ est ***super-intégrable*** quand

$$y \longmapsto |f(x,y)| \int_{\mathbb{R}} \left| h(x,y,t) \log^{\ell} |t| \right| \, \mathrm{d}t \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Proposition. *$T \in \mathscr{E}(X \times \mathbb{R}^n)$ super-intégrable $\Longrightarrow \mathscr{I}_T \in \mathscr{E}(X)$.*

Proof. Fubini :
$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x,y) \, \mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x,y) \, h(x,y,t) \log^{\ell} |t| \, e^{\mathrm{i}(t+\varphi(x,y))} \, \mathrm{d}y\mathrm{d}t.$$
Donc on suppose $T = f(x,y) \, e^{\mathrm{i}\varphi(x,y)} \in \mathscr{D}(X \times \mathbb{R}^n)$.
Sur une cellule, on change de variables : $z = \varphi(x,y)$ et on prépare en z pour obtenir un facteur γ. $\square$

Étape clef : Lemme de séparation dans $\mathscr{E}(X \times \mathbb{R})$

Lemme de séparation. *Pour* $f \in \mathscr{E}(X \times \mathbb{R})$, *sur des cellules de* $X \times \mathbb{R}$, *il existe deux ensembles finis d'indices* $J^{\text{Super}}, J^{\text{Bad}} \subseteq \mathbb{N}$ *et des générateurs* S_j, B_j *tels que*

$$f = \sum_{j \in J^{\text{Super}}} S_j + \sum_{j \in J^{\text{Bad}}} B_j,$$

- S_j *super-intégrable,*
- $B_j = f_j(x) y^{r_j} \log^{s_j} y \; e^{i p_j (x, y^{1/d})}$, p_j *polynômes,* $\quad r_j \geq -1$

Preuve du lemme de séparation. On développe h en série entière en $y^{1/d}$, et on intègre par parties successivement pour créer S_j et B_j. $\square$

Preuve du théorème de stabilité.

Fait : $x \in \textbf{Int}\left(\sum_{j \in J^{\textbf{Bad}}} B_j, X\right) \implies \forall j \in J^{\textbf{Bad}}, f_j(x) = 0.$

$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, \mathrm{d}y = \sum_{j \in J^{\text{Super}}} \int_{\mathbb{R}} S_j \, \mathrm{d}y \in \mathscr{E}(X).$

Le cas $n > 1$: récurrence sur n et théorème de Fubini. $\square$

Fait : $x \in \mathbf{Int}\left(\sum_{j\in J^{\mathbf{Bad}}} B_j, X\right) \implies \forall j \in J^{\mathbf{Bad}}, f_j(x) = 0$**.**

Preuve. $B_j\left(y\right) = y^{r_j}\log^{s_j} y f_j(x)e^{\mathrm{i}p_j\left(y^{1/d}\right)}$, p_j polynômes distincts.

Soit $S\left(y\right) = \sum_{j;(r_j,s_j)\mathrm{maximal}} f_j(x)e^{\mathrm{i}p_j\left(y^{1/d}\right)}$. Comme $y^{r_j}\left(\log y\right)^{s_j} \geq y^{-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}+}\left|\sum_{j\in J^{\mathrm{Bad}}} B_j\left(y\right)\right|\mathrm{d}y$$

$$\geq \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}+}\frac{1}{y}\left|S\left(y\right)\right|\mathrm{d}y$$

$$\geq \frac{3\varepsilon}{2}\int_{|S|\geq\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{y} = +\infty. \qquad \square$$

L^p-complétude et transformée de Fourier L^2

Théorème de « L^p-complétude ». *Pour* $p \geq 1$, $(f_y(x))_{y \in \mathbb{R}} \in \mathscr{E}(X \times \mathbb{R})$ *Cauchy dans* $L^p(X) \Longrightarrow f_y \xrightarrow[y \to +\infty]{\| \ \|_p} f \in \mathscr{E}(X)$.

Corollaire. $\mathscr{F} : \mathscr{E} \cap L^2 \xrightarrow{isom} \mathscr{E} \cap L^2$. $\square$