Structure de Frobenius forte, rigidité et équations hypergéométriques

VARGAS-MONTOYA DANIEL

INSTITUT CAMILLE JORDAN, LYON

Équations fonctionnelles et interactions
Anglet, France
24-28 juin, 2019

Motivation

Pour certaines G -fonctions, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in \mathbb{Q}[[z]]$, il existe un ensemble $\mathcal{S}$ infini de nombres premiers tel que pour tout $p \in \mathcal{S}$:

$f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. On peut donc réduire f modulo p.

$$f_{|p} := \sum_{n \geq 0} (a_n \mod p) z^n \in \mathbb{F}_p[[z]]$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$.

En particulier, il existe $a_0(z), \ldots, a_d(z) \in \mathbb{F}_p(z)$ tels que

$$a_0(z) f_{|p}(z) + a_1(z) f_{|p}(z^p) + \cdots + a_d(z) f_{|p}(z^{p^d}) = 0.$$

En 1984, Deligne montre que c'est le cas si $f(z) \in \mathfrak{D}$, où $\mathfrak{D} = \bigcup_{d>0} \mathfrak{D}_d$ et $\mathfrak{D}_d$ est l'image de $\Delta_d : \mathbb{Q}[[z_1, \ldots, z_d]]^{alg} \to \mathbb{Q}[[z]]$,

$$\Delta_d\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_d)\in\mathbb{N}^d} c_{(i_1,\ldots,i_d)} z_1^{i_1} \cdots z_d^{i_d} \Big) = \sum_{n\geq 0} c_{(i_n,\ldots,i_n)} z^n.$$

Question de Deligne: Si $f \in \mathfrak{D}$, existe-t-il une constante $c > 0$ telle que $\deg(f_{|p}) < p^c$, pour tout $p \in \mathcal{S}$?

Par exemple la G -fonction

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{16^n} \binom{2n}{n}^2 z^n = {}_2F_1(1/2, 1/2; 1, z)$$

est la diagonale de

$$\frac{2}{2 - z_1 - z_2} \cdot \frac{2}{2 - z_3 - z_4}.$$

Le degré d'algébricité de $f_{1|p}$ est majoré par $p - 1$.

Il existe aussi des G-fonctions qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{D}$, comme par exemple

$$f_2(z) = {}_2F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]],$$

où $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$.

Si $p \equiv 1 \mod 3$, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Est-ce que $f_{2|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$?

La notion de **structure de Frobenius forte** offre un point de vue général sur la question suivante:

Si f est une G-fonction telle que $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, sa réduction $f_{|p}$ est-elle algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$? Si oui, que peut-on dire de son degré d'algebricité?

Corps des éléments analytiques

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{Q}(z))$

Situation classique

On dit que A et B sont **globalement équivalentes** dans $\mathbb{C}(z)$, s'il existe $H \in Gl_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - HB$$

On dit que A et B sont $\mathbb{C}(z)$**-équivalentes**.

Situation dans le monde p-adique.

On dit que A et B sont **globalement équivalentes**, s'il existe $H \in Gl_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - HB$$

On dit que A et B sont E_p**-équivalentes.**

Où E_p est corps des éléments analytique, c'est-à-dire, le complété de $\mathbb{C}_p(z)$ pour la norme de Gauss.

Structure de Frobenius forte

Fixons l'opérateur différentiel
$L := \frac{d}{dz^n} + a_1(z)\frac{d}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$.

Matrice compagnon.

Pour l'opérateur différentiel L considérons sa matrice compagnon A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & -a_{n-2}(z) & \dots & -a_2(z) & -a_1(z) & \end{pmatrix}.$$

Structure de Frobenius forte

Fixons l'opérateur différentiel
$L := \frac{d}{dz^n} + a_1(z)\frac{d}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$.

Matrice compagnon.

Pour l'opérateur différentiel L considérons sa matrice compagnon A .

Structure de Frobenius forte.

L a une structure de Frobenius forte pour p, de période h, s'il existe un entier $h \geq 1$, tel que les matrices A et $p^h z^{p^h-1} A(z^{p^h})$ sont E_p-**équivalentes**.

Autrement dit, $\exists H \in Gl_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - H(p^h z^{p^h-1} A(z^{p^h})).$$

Action du Frobenius et algébricité modulo p

Action du Frobenius: Si L a une structure de Frobenius forte pour p, il existe $h_{11}, \ldots, h_{1n} \in E_p$ tels que pour toute solution de f de L,

$$h_{11} f(z^{p^h}) + \cdots + h_{1n} f^{(n-1)}(z^{p^h})$$

est solution de L. Cette application est $\mathbb{C}_p$-linéaire.

En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton on obtient

Théroème (I)

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) z^n \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ solution de L muni d'une structure de Frobenius forte pour p. Alors $f_{|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ et

$$\deg(f_{|p}) \leq p^{n^2 h}$$

ÉQUATIONS HYPERGÉOMÉTRIQUE DE GAUSS

Dwork et Salinier ont montré le théorème suivant en utilisant des outils différents.

Théroème

Soient $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Si $a, b, c-a, c-b \notin \mathbb{Z}$, l'opérateur différentiel associé à l'équation hypergéométrique de Gauss,

$$\frac{d^2}{dz^2} + \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}\frac{d}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)}, \tag{1}$$

a une strucuture de Frobenius forte pour presque tout p de période

$$h \leq \varphi(d(a))\varphi(d(b))\varphi(d(c)),$$

où φ est l'indicatrice de Euler et d est la fonction dénominateur.

RIGIDITÉ

La méthode de Salinier repose sur la théorie classique des équations différentielles et la théorie des équations différentielles p-adiques.

Théroème (VM.)

Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.

1. *Les points singuliers de L sont réguliers .*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Alors, l'équation L a une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p.

Groupe de Monodromie

Soient $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_r = \infty$ les singularités de L. Soit $M_i \in Gl_n(\mathbb{C})$ la matrice de monodromie locale de L en γ_i.

Alors le groupe de monodromie de L est le groupe engendré par les matrices $M_1, \ldots, M_r$ avec la relation $M_1 \cdots M_r = Id_n$.

On dit que le groupe de monodromie de L est rigide si pour tout $N_1, \ldots, N_r \in Gl_n(\mathbb{C})$ telles que $N_1 \cdots N_r = Id_n$ et N_i conjuguée à M_i alors il existe $U \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que

$$UN_iU^{-1} = M_i \qquad \forall 1 \leq i \leq r\,.$$

Équation hypergéométrique généralisée

L'opérateur différentiel associé à l'équation différentielle hypergéométrique généralisée est

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1),$$

Équation hypergéométrique généralisée

L'opérateur différentiel associé à l'équation différentielle hypergéométrique généralisée est

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_n) + (\delta + \beta_1 - 1) \cdots (\delta + \beta_n - 1),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$.

ÉQUATION HYPERGÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALISÉE

L'opérateur différentiel associé à l'équation différentielle hypergéométrique généralisée est

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n) + (\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$.

- Les singularités de $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ sont régulières . Ses points singuliers sont $0, 1, \infty$.
- Les exposants à l'infini sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, les exposant en 0 sont $1-\beta_1, \ldots, 1-\beta_n$, et les exposants en 1 sont $0, 1, \ldots, n-2, -1+\sum(\beta_i - \alpha_i)$.
- Le groupe de monodromie de $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est rigide. (Levelt).

ÉQUATION HYPERGÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALISÉE

L'opérateur différentiel associé à l'équation différentielle hypergéométrique généralisée est

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : -z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_n) + (\delta + \beta_1 - 1) \cdots (\delta + \beta_n - 1),$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ et $\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$.

Soit $\mathcal{S} := \{p \in \mathcal{P} \setminus \{2\} \text{ tels que } |\alpha_i|_p, |\beta_j|_p = 1\}$.

Théroème (II)

$\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ *possède une structure de Frobenius forte pour* $p \in \mathcal{S}$ *de période*

$$h \leq \prod_{i=1}^{n} \varphi(d(\alpha_i)) \prod_{j=1}^{n} \varphi(d(\beta_j)).$$

ALGÉBRICITÉ MODULO P

Revenons sur la série

$$f_2(z) :=_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/2)_k^2}{(2/3)_k k!} \right) z^n \in \mathbb{Q}[[z]].$$

Elle annule $\mathcal{H}_{(1/2,1/2),(2/3,1)}$.

Le **théorème II** nous assure que $\mathcal{H}_{(1/2,1/2),(2/3,1)}$ a une structure de Frobenius forte pour $p \geq 5$

Pour $p \equiv 1 \mod 3$, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et ici $h = 1$, le **théorème I** implique que $f_{2|p}$ est algébrique et

$$\deg(f_{2|p}) \leq p^{2^2}.$$

Considérons la série

$$f_3(z) :={}_3F_2(1/9, 4/9, 5/9; 1/3, 1, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1/9)_k (4/9)_k (5/9)_k}{(1/3)_k k!^2} \right) z^n.$$

On ne sait toujours pas si elle appartient à l'ensemble $\mathfrak{D}$. On a que $f_3(z)$ annule $\mathcal{H}_{(1/9,4/9,5/9),(1/3,1,1)}$.

D'après le **théorème II**, $\mathcal{H}_{(1/9,4/9,5/9),(1/3,1,1)}$ a une structure de Frobenius forte pour $p \geq 7$.

Pour $p \neq 3$, $f_3(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. En appliquant le **théorème I** on obtient que, pour $p \geq 7$, $f_{3|p}$ est algébrique et

$$\deg(f_{3|p}) \leq p^{3^2 \times 6}.$$

Théroème (VM.)

Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées.

1. *Les points singuliers de L sont réguliers .*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Alors, l'équation L a une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p.

Stratégie de preuve du théorème (VM.)

Construisons l'ensemble $\mathcal{S}$ des nombres premiers qui vont munir L d'une structure de Frobenius forte.

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble formé des éléments suivants :

- Les dénominateurs des exposants des points $\gamma_1 = 0, \dots, \gamma_r = \infty$.
- Les nombres algébriques, $\gamma_2, \dots, \gamma_{r-1}, \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{r-1} + 1$, les différences $\gamma_i - \gamma_j$ pour $i \neq j$.

$\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P} \text{ tels que } |u|_p = 1 \ \forall u \in \mathfrak{A}\}$, alors $\mathcal{P} \setminus \mathcal{S}$ est fini.

Comme les exposants sont des nombres rationnels, il existe $h \geq 1$ tel que $\forall p \in \mathcal{S}$, $p^h\alpha \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$, pour tout exposant α et $|\gamma_i^{p^h} - \gamma_i|_p < 1$. $\forall 1 \leq i \leq r-1$.

La matrice $B := p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})$ n'a pas les mêmes singularités que A, il est donc impossible de comparer localement A et B sur $\mathbb{C}(z)$.

Par contre, les singularités de B modulo p sont les mêmes que celles de A modulo p. Ainsi, B est E_p**-équivalente** à

$$G = -\frac{1}{z+1}\left(\sum_{j=1}^{r} N_j\right) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{z-\gamma_j} N_j \in M_n(\mathbb{C}_p(z)),$$

où les $N_j \in M_n(\mathbb{C}_p)$ et les valeurs propres de N_j sont les exposants de L en γ_j multipliés par p^h et $\sum_{j=1}^{r} N_j \in M_n(\mathbb{Z})$ est une matrice diagonale.

En particulier les valeurs propres de N_j sont de la forme $p^h \alpha_{i,j} \in \mathbb{Q}$.

1. Soit $\kappa : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$ un isomorphisme de corps.

$$G^\kappa = -\frac{1}{z+1}\left(\sum_{j=1}^{r} N_j^\kappa\right) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{z-\kappa(\gamma_j)} N_j^\kappa \in M_n(\mathbb{C}(z)) .$$

De la construction de $\mathcal{S}$ et h, on obtiendra que les matrices de monodromie locale de G^κ et A sont conjuguées.

2. Finalement l'hypothèse de rigidité impliquera que A et G^κ sont $\mathbb{C}(z)$-équivalentes. Ainsi, A et G sont E_p-équivalentes, ce qui implique que A et B sont E_p-équivalentes.

Monodromie de L

Soit M_j la matrice de monodromie locale de L en γ_j. Comme γ_j est un point singulier régulier, M_j est conjuguée à une matrice de la forme $exp(2\pi i C_j)$, où $C_j \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfait aux conditions suivantes:

a) Si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C_j, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$.

b) Soit $\alpha_{i,j}$ un exposant de L en γ_j, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_{i,j} + m$ est une valeur propre de C_j.

Comme $p^h \alpha_{i,j} \equiv \alpha_{i,j} \mod \mathbb{Z}$ pour $p \in \mathcal{S}$, les matrices $exp(2\pi i C_j)$ et $exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées.

Monodromie de G^κ

$$G^\kappa = -\frac{1}{z+1}\left(\sum_{j=1}^{r} N_j^\kappa\right) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{z-\kappa(\gamma_j)} N_j^\kappa \in M_n(\mathbb{C}(z)) .$$

Soit T_j la matrice de monodromie locale de G^κ en $\kappa(\gamma_j)$. Comme $\kappa(\gamma_j)$ est une singularité régulière de G^κ, T_j est conjuguée à $exp(2\pi i L_j)$, où L_j vérifie :

- Soient λ, β deux valeurs propres différentes de L_j, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$.
- Si α est une valeur propre de N_j^κ, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + m$ est une valeur propre de L_j.

Ainsi, les valeurs propres de L_j sont de la forme $p^h\alpha_{i,j} + m$, où $p^h\alpha_{i,j}$ est une valeur propre de N_j^κ. Ainsi, $exp(2\pi i L_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées.

RIGIDITÉ

Ainsi M_j et T_j sont conjuguées et comme le groupe de monodromie de L est rigide alors les groupes de monodromie de L et G^{κ} sont isomorphes et, d'après la correspondance de Riemann-Hilbert , il existe $H_1 \in Gl_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_1 = AH_1 - H_1G^{\kappa}\,.$$

On pose $H = H_1^{\kappa^{-1}}$. Ainsi, $H \in Gl_n(\mathbb{C}_p(z)) \subset Gl_n(E_p)$ et comme $\frac{d}{dz} \circ \kappa^{-1} = \kappa^{-1} \circ \frac{d}{dz}$, alors

$$\frac{d}{dz}H = A^{\kappa^{-1}}H - HG\,.$$

Par consquent, A et G sont E_p-**équivalentes**, mais G est E_p-**équivalente** à B , alors par transitivité on obtient que A et B sont E_p-**équivalentes.** $\square$